The orthogonal decomposition in Banach spaces and its applications to fixed point theory (Nonlinear Analysis and Convex Analysis)

本田, 卓

数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 171-176

The orthogonal decomposition in Banach spaces and its applications to fixed point theory

國立中山大學應用數學系　本田卓　(HONDA Takashi)

概　要　近年、Alber[1]、高橋-筆者 [2] らにより、Banach 空間に対し Hilbert 空間のような直交補空間分解を導入することが可能となった。これは Hilbert 空間での直交補空間分解の純粋な拡張で、Banach 空間における非拡大射影と茨木-高橋 [6] により導入された一般化非拡大射影との概念を繋ぐものである。今発表ではさらに発展させて、Banach 空間での非拡大写像と一般化非拡大写像の関係を示し、幾つかの不動点理論への応用を紹介する。

1　はじめに

E を滑らかな Banach 空間、J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) とすると、以下のような汎関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を定義できる。

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2.$$

正規化双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像で、どんな Bnach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる。さらに、E が滑らかな Banach 空間の場合は一価写像である。その他詳細は [10] を参照。C を E の閉凸部分集合とし、写像 $T : C \to C$ が不動点を持ち、不等式

$$\phi(Tx,y) \leq \phi(x,y)$$

をすべての C の要素 x と T の不動点 $y \in F(T)$ とにおいて満たすとき、この写像を一般化非拡大 (generalized nonexpansive) 写像と呼ぶ。茨木-高橋 [6] を参照。もし E の、空でないある部分集合の上への冪等写像 R がこの性質を持つとき、R を一般化非拡大射影 (generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ。さらに、すべての $x \in E$、$t \geq 0$ において等式 $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ が成り立つとき、R を sunny generalized nonexpansive retraction と呼ぶ。逆に、E のある部分集合が E からその集合上への sunny generalized nonexpansive retraction を持つとき、その集合を E の sunny generalized nonexpansive retract と呼ぶ。E が滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間のとき、E の部分集合 C が E の sunny generalized nonexpansive retract になるための必要十分条件は、高阪-高橋 [9] により、C の正規双対写像 J による像 JC が E の共役空間 E^* での閉凸集合であることが知られている。またこれは E の一般化非拡大レトラクト (generalized nonexpansive retract) である必要十分条件でもある。

一方、C を Banach 空間 E の閉凸部分空間とし、写像 $T : C \to C$ が性質

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をすべての $x, y \in C$ で満たすとき、この写像を非拡大 (nonexpansive) 写像と呼ぶ。また、不動点集合 $F(T)$ が空でなく、不等式

$$\|Tx - m\| \leq \|x - m\|$$

が任意の $m\in F(T)$、$x\in C$ で成り立つなら、この写像を quasi-nonexpansive 写像と呼ぶ。E の、空でないある部分集合の上への非拡大冪等写像を非拡大射影 (nonexpansive retraction) と呼ぶ。同様に、E の部分集合が、E のその集合の上への非拡大射影を持つとき、その集合を E の非拡大レトラクト (nonexpansive retract) と呼ぶ。Banach 空間における部分集合が、空間全体の非拡大レトラクトになるための必要十分条件はまだ知られていない。Hilbert 空間においては、すべての閉凸部分集合が非拡大レトラクトである [10]。非拡大射影のレトラクトは非拡大写像の不動点集合でもあるし、多くの場合、非拡大写像の不動点集合は非拡大レトラクトでもあるので、非拡大レトラクトの研究は Banach 空間における非拡大写像の不動点問題に応用することが出来る。Banach 空間における非拡大レトラクトに関しては [8] を参照。

2 本論

本論では、特に但し書きがなければ、空間として滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間 E を用いるものとする。この条件下では、正規化双対写像は E から共役空間 E^* への全単射写像になることが知られている [10]。

最初に、Banach 空間における直交補空間分解を証明する。ここでは Hilbert 空間で Moreau 分解と呼ばれる閉凸錐を使った分解を、Banach 空間に拡張する。ここで錐 K とは、x が K の要素ならば、任意の正の数 λ において λx も K の要素であるような集合を指す。この分解の特殊な例として、閉凸錐の代わりに閉部分空間を用いれば、Banach 空間における直交補空間分解となる。

まず、最近導入された二つの新しい非線形写像を紹介する。写像 $T:E\to E$ が不等式

$$\phi(Tx,Ty)+\phi(Ty,Tx)+\phi(x,Tx)+\phi(y,Ty)\le\phi(x,Ty)+\phi(y,Tx)$$

をすべての $x,y\in E$ において満たすとき、この写像を firmly generalized nonexpansive type と呼ぶ [7]。また、写像 $T:E\to E$ が不等式

$$\begin{aligned}&\phi(x-Sx,y-Sy)+\phi(y-Sy,x-Sx)\\&\le\phi(x,y-Sy)+\phi(y,x-Sx)-\phi(x,x-Sx)-\phi(y,y-Sy)\end{aligned}$$

をすべての $x,y\in E$ において満たすとき、この写像を firmly metric operator と呼ぶ [11]。尚、以下では、$C^*_\circ$、C° は各々、部分集合 $C^*\subset E^*$、$C\subset E$ の双対錐を表す。

$$C^*_\circ=\{x\in E:f(x)\le 0\text{ for all }f\in C^*\}$$

$$C^\circ=\{f\in E^*:f(x)\le 0\text{ for all }x\in C\}.$$

さらに、以下の補題を利用する。

Lemma 2.1 ([4]). C を E の閉凸部分集合、P_C を E の C の上への距離射影、I を E での恒等写像とすると、写像 $T=I-P_C$ は E での *firmly generalized nonexpansive type* である。さらに、もし C が 0 を要素に含むなら、$F(T)=P_C^{-1}0=J^{-1}C^\circ$ が成り立ち、$JF(T)$ は E^* の閉凸錐である。

Lemma 2.2 ([4]). 写像 $T:E\to E$ を、$JF(T)$ が E^* の非空閉凸部分集合で $T(E)=F(T)$ を満たす *firmly generalized nonexpansive type* であるとすると、T は E の $F(T)$ の上への *sunny generalized nonexpansive retraction* である。

Lemma 2.3 ([4]). 写像 $T:E\to E$ を、$F(T)$ が E の非空閉凸部分集合で $T(E)=F(T)$ を満たす *firmly metric operator* とすると、T は E の $F(T)$ の上への距離射影である。

これらを利用して、Banach 空間での Moreau 分解を示す。

Theorem 2.1. K を E の閉凸錐、P_K を E の K の上への距離射影、I を E の恒等写像とすると、写像 $T = I - P_K$ は E の $J^{-1}K^\circ$ の上への *sunny generalized nonexpansive retraction* である。

Proof. 距離射影の性質 [10] より、任意の $x \in E$、$m \in K$ において、

$$\langle J(x - P_K x), P_K x - m\rangle \geq 0$$

が成り立つ。さらに K は 0、$2P_K x$ を要素に持つので、

$$\langle J(x - P_K x), P_K x\rangle \geq 0,$$

$$\langle J(x - P_K x), P_K x\rangle \leq 0$$

が成り立つ。よって、

$$\langle J(x - P_K x), P_K x\rangle = 0$$

を得る。従って、任意の $x \in E$、$m \in K$ において、

$$\begin{aligned}
&\langle J(x - P_K x), P_K x - m\rangle \geq 0\\
\Rightarrow &\langle J(x - P_K x), P_K x\rangle - \langle J(x - P_K x), m\rangle \geq 0\\
\Rightarrow &\langle J(x - P_K x), m\rangle \leq 0\\
\Rightarrow &\langle JTx, m\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

が成り立つ。つまり、任意の $x \in E$ において $JTx \in K^\circ$ が成り立ち、

$$F(T) \subset T(E) \subset J^{-1}K^\circ$$

を得る。Lemma 2.1 より、T は firmly generalized nonexpansive type で、$JF(T)$ は E^* の閉凸錐 、$F(T) = J^{-1}K^\circ$ が成り立つ。よって、$T(E) = F(T) = J^{-1}K^\circ$ と Lemma 2.2 より、T は E の $F(T) = J^{-1}K^\circ$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction である。 □

Theorem 2.2. K^* を E^* の閉凸錐とし、R_{K^*} を E の $J^{-1}K^*$ の上への *sunny generalized nonexpansive retraction*、I を E での恒等写像とすると、写像 $T = I - R_{K^*}$ は E の $K^*_\circ$ の上への距離射影である。

Proof. $J^{-1}K^*$ が 0 を含むことと sunny generalized nonexpansive retraction の性質 [6] より、

$$\begin{aligned}
x \in R_{K^*}^{-1}0 &\Leftrightarrow R_{K^*}x = 0\\
&\Leftrightarrow \langle x - 0, J0 - JJ^{-1}m^*\rangle \geq 0 \text{ for any } m^* \in K^*\\
&\Leftrightarrow \langle x, m^*\rangle \leq 0 \text{ for any } m^* \in K^*\\
&\Leftrightarrow x \in K^*_\circ
\end{aligned}$$

が成り立つ。つまり

$$R_{K^*}^{-1}0 = K^*_\circ$$

を得る。また、T の定義より

$$F(T) = R_{K^*}^{-1}0$$

を得る。よって、

$$F(T) = K^*_\circ$$

が成り立つ。sunny generalized nonexpansive retraction は firmly generalized nonexpansive type なので、T は $F(T)=K_\circ^*$ を満たす firmly metric operator である。よって Lemma 2.3 より、$T(E)\subset F(T)=K_\circ^*$ を示せば十分である。今、0、$2R_{K^*}x$ は $J^{-1}K^*$ の要素なので、sunny generalized nonexpansive retraction の性質 [6] より、

$$\langle x-R_{K^*}x, JR_{K^*}x\rangle = 0$$

が成り立つ。従って、任意の $x\in E$、$m^*\in K^*$ において $\langle x-R_{K^*}x, JR_{K^*}x-JJ^{-1}m^*\rangle \geq 0$ が、つまり

$$\langle x-R_{K^*}x, m^*\rangle \leq 0$$

が成り立つ。よって、T の定義より $T(E)\subset K_\circ^*$ が成り立つ。このことより、$T=P_{K_\circ^*}$ が言えた。 □

この分解の詳細についてはを [4, 5] を参照。

さらに、非拡大写像と一般化非拡大写像を繋ぐ以下の定理を証明する。

Theorem 2.3 ([4]). もし、写像 $T:E\to E$ が錐である不動点集合 $F(T)$ をもつ *quasi-nonexpansive* 写像ならば、その写像は一般化非拡大写像でもある。

Proof. まず、任意の $x\in K$、$m\in F(T)$ において、不等式

$$\langle x-Tx, Jm\rangle \leq 0, \tag{2.1}$$

が成り立つことを示す。

$m=0$ の場合は自明。

ある $x\in E\setminus F(T)$ と 0 でない $m\in F(T)$ を考える。すべての正の実数 $\alpha>0$ において、

$$x\in F(T)\Leftrightarrow \alpha x\in F(T)$$

なので、$\frac{x}{k}-m\neq 0$ が任意の正の数 $k>0$ で成り立つ。Hahn-Banach 定理より、$\left\langle \frac{x}{k}-m, \xi_k\right\rangle = \left\|\frac{x}{k}-m\right\|$、$\|\xi_k\|=1.$ を満たす $\xi_k\in E^*$ が各、正の数 k において存在する。よって

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{Tx}{k}-m, \xi_k\right\rangle &\leq \left\|\frac{Tx}{k}-m\right\| = \frac{1}{k}\|Tx-km\| \\ &\leq \frac{1}{k}\|x-km\| = \left\|\frac{x}{k}-m\right\| \\ &= \left\langle \frac{x}{k}-m, \xi_k\right\rangle.\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\langle x-Tx, \xi_k\rangle \geq 0$$

が言える。$\{\xi_k\}$ は有界なので、∞ に発散する正数列 $\{k_n\}$ が存在して、$\frac{x}{k_n}-m$ が $-m$ に強収束し、かつ、$\{\xi_{k_n}\}$ がある要素 $\xi\in E^*$ に弱収束するようにすることが出来る。

ノルムの弱下半連続性より

$$\|\xi\| \leq \liminf_{i\to\infty}\|\xi_{k_n}\| = 1$$

が成り立つ。一方、今、$x_n = \frac{x}{k_n} - m$ とすると、不等式

$$|\langle -m, \xi\rangle - \|x_n\|| = |\langle -m, \xi\rangle - \langle x_n, \xi_{k_n}\rangle| \\ \leq |\langle -m, \xi - \xi_{k_n}\rangle| + |\langle -m - x_n, \xi_{k_n}\rangle|$$

が成り立つ。$n \to \infty$ のとき $\langle -m, \xi - \xi_{k_n}\rangle \to 0$、$\langle -m - x_n, \xi_{k_n}\rangle \to 0$ が言えるので、

$$\|x_n\| \to -\langle m, \xi\rangle = \langle m, -\xi\rangle$$

を得る。よって、$\langle m, -\xi\rangle = \|m\|$ が成り立つ。従って、

$$\|m\| = \langle m, -\xi\rangle \leq \|m\|\|\xi\|$$

より $\|\xi\| \geq 1$ となり、$\|\xi\| = 1$ が言える。この事より E^* の要素 $-\|m\|\xi$ は Jm に含まれることが分かる。今、正規化双対写像 J は一価なので $-\|m\|\xi = Jm$ と書ける。従って、

$$\langle x - Tx, Jm\rangle \leq 0$$

を得る。

よって、任意の $x \in K$、$m \in F(T)$ において、不等式 (2.1) が成立する。この事より、任意の $x \in K$、$m \in F(T)$ において、

$$\langle x, Jm\rangle \leq \langle Tx, Jm\rangle$$

が成り立つ。T は quasi-nonexpansive 写像で 0 を不動点集合 $F(T)$ に含むので、不等式 $\|Tx\| \leq \|x\|$ が常に成り立つ。これらより、任意の $x \in E$、$m \in K$ において、$\|Tx\|^2 - 2\langle Tx, Jm\rangle + \|m\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\langle x, Jm\rangle + \|m\|^2$ が言え、つまり

$$\phi(Tx, m) \leq \phi(x, m)$$

が成り立つ。これは定義より T が一般化非拡大であることを言っている。 □

この二つの定理を組み合わせることで、不動点理論に関する以下のような定理を導くことが出来る。

Theorem 2.4 ([3]). Y^* を共役空間 E^* の閉部分空間とする。もし、E の $J^{-1}Y^*$ の上への *sunny generalized nonexpansive retraction* が *quasi-nonexpansive* ならば、それは線形射影である。逆に、すべての縮小線形射影は *sunny generalized nonexpansive* かつ *quasi-nonexpansive* である射影である。

Theorem 2.5 ([4]). H を E の閉半空間、つまり、ある要素 $z^* \in E^* \setminus \{0\}$ において

$$H = \{x \in E : \langle x, z^*\rangle \leq 0\}$$

と定義される集合とする。H が E の非拡大レトラクトである事と JH が E^* の閉半空間である事とは同値である。

Theorem 2.6 ([12]). E を滑らかで一様凸なノルムを持つ *Banach* 空間とし、T を E の縮小線形写像とする。今、実数列 $\{\alpha_n\}$ が $0 \leq \alpha_n \leq 1$、$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ を満たすならば、任意の要素 $x \in E$ より以下のように生成される *(Mann 型)* 点列 $\{x_n\}$ は T の不動点に強収束する。

$$\begin{cases} x_1 = x \in E \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

3 結論

不動点を持つ場合には、Hilbert 空間においては一致する非拡大写像と一般化非拡大写像は Banach 空間では一般には一致しない。ただし、不動点集合がある条件を満たす場合には、両者にある関係があることが分かった。これと、Banach 空間での直交補空間分解を組み合わせることで、一般には難しい非拡大写像の問題を一般化非拡大写像の問題に転換することで解くことが出来る。両者の関係はまだ不明な点が多く、その解明が今後の課題である。

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.

[2] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., to appear.

[3] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), no.3, 303–313.

[4] H. Honda, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Nonexpansive retractions onto closed convex cones in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), no.3, 1023–1046.

[5] H. Hudzik, Y. Wang and R. Sha *Orthogonally complemented subspaces in Banach spaces* , Numer. Funct. Anal. Optim. **29** (2008), no.7-8, 779–790.

[6] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), no.1, 1–14.

[7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), no.1, 21–32.

[8] E. Kopecká and S. Reich, *Nonexpansive retracts in Banach spaces*, Fixed point theory and its applications, Banach Center Publ., **77**, 161–174, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2007.

[9] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), no.2, 197–209.

[10] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[11] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Nonlinear operators of monotone type and convergence theorems with equilibrium problems in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., to appear.

[12] J.-C. Yao, W. Takahashi and T. Honda, *Strong convergence theorems and nonlinear analytic methods for linear contractive mappings in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., to appear.

Department of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University, Taiwan
E-mail address: honda.takashi7@gmail.com